

# 非线性刚度对微机械陀螺动态性能的影响\*

佟向鹏, 王 玺

(海装驻北京地区第一军事代表室 北京 100076)

**摘要:** 为了提高微机械陀螺的稳定性, 研究自由振动状态下活动基座上 L-L 型双质量微机械陀螺的动态性能, 建立微机械陀螺的数学模型, 得到以幅值-相位为变量的运动微分方程的解, 并给出这种解与轨道元素的联系。研究框架质量和弹性件非线性刚度对陀螺漂移量的影响, 并给出数值例子。对所得到的解析关系式与曲线进行分析, 作出关于系统性能的相应结论。

**关键词:** 微机械陀螺; 弹性件非线性刚度; 自由振动; 陀螺漂移

中图分类号: TH113 文献标识码: A 文章编号: CN11-1780(2020)02-0010-05

## Effect of nonlinear stiffness on dynamic performance of the micromechanical gyroscope

TONG Xiangpeng, WANG Xi

(First Military Representative Office of the Naval Equipment Department in Beijing, Beijing 100076, China)

**Abstract:** In order to improve the stability of the micromechanical gyroscope, the dynamic performance of the L-L type two-mass micromechanical gyroscope on the movable base in free vibration state is studied, and the mathematical model of the micromechanical gyroscope is established to obtain the solution of the motion differential equation with amplitude-phase as the variable, and the relation between the solution and the orbital elements is given. In addition, the effects of the frame mass and the nonlinear stiffness of elastic parts on the gyro drift are studied, and a numerical example is given. Finally, the obtained analytic relation and curve are analyzed, and the corresponding conclusions about the system performance are drawn.

**Key words:** Micromechanical gyroscope; Nonlinear stiffness of elastic parts; Free vibration; Gyro drift

### 引 言

微机械陀螺技术是未来科学技术发展的方向之一, 目前市场上基于 MEMS (Micro Electro Mechanical System) 技术研制的微机械陀螺已经占据了主导地位<sup>[1]</sup>, 其主要优点是体积小、能耗少、产品造价低, 而缺点是稳定性差<sup>[2-4]</sup>。因此, 提高这类仪表的可靠性和技术指标是当前迫切需要解决的问题。

为了提高微机械陀螺检测输出信号灵敏度的稳定性, 文献[5]首先求解了线性刚度下系统的稳态响应, 进而采用多尺度法推导出非线性动力学方程的近似周期解。此外, 文献[6]也研究了系统非线性刚度对陀螺性能的影响, 并基于拉格朗日方程建立了系统的动力学方程, 利用平均法进行求解, 进一步分析了角度偏差对系统零偏、机械灵敏度和非线性度的影响。根据现有文献可知<sup>[7-10]</sup>, 提高微机械陀螺精度指标的有效方法之一是研制多质量装置, 例如国外的 Bosch 公司已经开始从事这类陀螺的研制工作, 并且发现两个惯性质量的结构具有较好的技术指标稳定程度, 但是, 非线性动态效应对 L-L 型双质量微机械陀螺的动态性能具有明显的影响。因此, 本文主要研究如图 1 所示的微机械陀螺动态模型<sup>[7-13]</sup>。

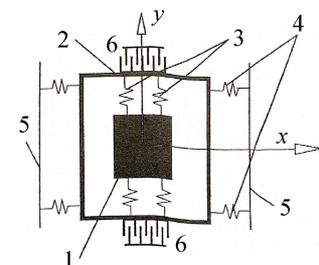


图 1 微机械陀螺的动态模型  
Fig. 1 Dynamic model of the micromechanical gyroscope

如图 1 所示, 利用弹性内部支撑 3 (扭力杆) 把敏感元件 1 固联到框架 2 上, 这样的结构保证了敏感元件沿  $y$  轴的一个自由度; 利用扭杆 4 (外部) 使框架 2 与基座 5 联结, 这保证敏感元件沿  $x$  轴的一个自由度。

扭杆的特殊形状保证了敏感元件主要工作在弯曲状态, 但实际上该状态是观测不到的。利用电容系统激起敏感元件的振动框架 2, 并与基座 5 上的梳板一起构成了平板式电容器 6。当框架振动时, 梳板触点之间的间隙会发生变化, 这就导致了电容的变化。本文的目的是分析自由振动状态下弹性元件非线性刚度对 L-L 型双质量微机械陀螺敏感元件性能的影响。

## 1 运动方程的建立

安装在基座上的“敏感元件-框架”系统, 以常值角速度绕  $OZ$  轴旋转, 其动能表达式可以写为

$$T = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}^2 + (x\Omega)^2) + \frac{1}{2} m_q ((\dot{x} - y\Omega)^2 + (\dot{y} + x\Omega)^2) \quad (1)$$

式中,  $x, y$  分别为敏感元件在与框架固联的坐标系内的横、纵坐标;  $m_p$  为敏感元件的质量;  $m_q$  为框架的质量;  $\Omega$  为基座上陀螺的角速度。

进一步, 系统势能  $\Pi$  可以表达为

$$\Pi = c_x \frac{x^2}{2} + c_y \frac{y^2}{2} + d(x^2 + y^2)^2 \quad (2)$$

式中,  $c_x, c_y$  分别为扭杆在  $x$  和  $y$  轴上的刚度;  $d$  为描述系统非线性形变的参数。

在这种情况下, 系统的拉格郎日函数如下:

$$L = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}^2 + (x\Omega)^2) + \frac{1}{2} m_q ((\dot{x} - y\Omega)^2 + (\dot{y} + x\Omega)^2) - c_x \frac{x^2}{2} - c_y \frac{y^2}{2} - d(x^2 + y^2)^2 \quad (3)$$

在基座角速度为常值的情况下, 基于拉格郎日公式可以得到下面的方程组:

$$\begin{cases} (m_p + m_q)\ddot{x} + c_x x - 2m_q \Omega \dot{y} - (m_p + m_q)\Omega^2 x + 4dx^3 = 0 \\ m_q \ddot{y} + c_y y + 2m_q \Omega \dot{x} - m_q \Omega^2 y + 4dy^3 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

为了改善陀螺的共振特性, 应该合理选择扭杆的弹性特性, 使得针对广义坐标的共振频率相同。因此, 假设系数  $c_x$  和  $c_y$  满足下面的关系式

$$c_x = \frac{m_p + m_q}{m_q} c_y \quad (5)$$

式中, 按下面的公式转换为无因次时间  $\tau$  和无因次小振幅  $\alpha, \beta$

$$\begin{cases} x = \sqrt{\varepsilon h} \alpha, \quad y = \sqrt{\varepsilon h} \beta \\ \tau = \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{c_y}{m_p}} \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $h$  为平板电容触点梳板之间间隙的大小。

因此, 可以得到如下结果:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + 2\gamma\dot{\alpha} - 2\frac{1}{1+\delta}v\dot{\beta} + (1-v^2)\alpha + 4\varepsilon\tilde{d}\frac{1}{1+\delta}\alpha^3 = 0 \\ \ddot{\beta} + 2\gamma\dot{\beta} + 2v\dot{\alpha} + (1-v^2)\beta + 4\varepsilon\tilde{d}\beta^3 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中,

$$v = \Omega \sqrt{\frac{m_p}{c_y}}, \quad \tilde{d} = \frac{dh^2}{c_y}, \quad \delta = \frac{m_q}{m_p} \quad (8)$$

式(7)中, 考虑了系统中存在的黏性摩擦力,  $\nu$  为无因次的基座角速度,  $\tilde{d}$  为描述非线性形变的无因次参数,  $\delta$  为框架质量与敏感元件质量的比。

进一步, 假设无因次的黏性摩擦系数  $\gamma$  与小参数  $\varepsilon$  具有相同的量级, 即  $\gamma = \varepsilon\gamma_1$ 。此外, 框架的质量明显小于敏感元件的质量, 因此无因次参数  $\delta = \varepsilon\delta_1$ 。基于以上的分析, 式(7)可以取如下的形式:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - 2\nu\dot{\beta} + (1 - \nu^2)\alpha = -\varepsilon F_1 \\ \ddot{\beta} + 2\nu\dot{\alpha} + (1 - \nu^2)\beta = -\varepsilon F_2 \end{cases} \quad (9)$$

式中,

$$\begin{cases} F_1 = 2\nu\dot{\alpha} + 2\alpha\delta\dot{\beta} + 4\tilde{d}\alpha^3 \\ F_2 = 2\gamma\dot{\beta} + 4\tilde{d}\beta^3 \end{cases} \quad (10)$$

这里省略了式(9)中系数  $\delta$ 、 $\gamma$  的下标“1”, 并且式(9)中“=”的右侧只取小参数的一阶精度。

## 2 敏感元件动态性能分析

为了求解式(4), 这里采用克雷洛夫-博戈留玻夫法, 将式中变量转换为幅值-相位, 因此, 得到如下表达式

$$\begin{cases} \alpha = A(\tau)\sin(\omega_1\tau + \varphi_1) + B(\tau)\sin(\omega_2\tau + \varphi_2) \\ \beta = A(\tau)\cos(\omega_1\tau + \varphi_1) - B(\tau)\cos(\omega_2\tau + \varphi_2) \end{cases} \quad (11)$$

式中,  $A$ 、 $B$  为幅值;  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  为相位;  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  为系统的固有频率, 且  $\omega_1 = 1 + \nu$ ,  $\omega_2 = 1 - \nu$ 。

进一步, 令  $\psi_1$ 、 $\psi_2$  为系统的全相位, 且有

$$\begin{cases} \psi_1 = \omega_1\tau + \varphi_1 \\ \psi_2 = \omega_2\tau + \varphi_2 \end{cases} \quad (12)$$

因此, 基于式(11)可以进一步推导得到

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = A\omega_1 \cos\psi_1 + B\omega_2 \cos\psi_2 \\ \dot{\beta} = -A\omega_1 \sin\psi_1 + B\omega_2 \sin\psi_2 \end{cases} \quad (13)$$

基于式(11)和式(13), 利用兼容性条件可以得到如下表达式:

$$\begin{cases} \dot{A}\sin\psi_1 + A\dot{\varphi}_1 \cos\psi_1 + \dot{B}\sin\psi_2 + B\dot{\varphi}_2 \cos\psi_2 = 0 \\ \dot{A}\cos\psi_1 - A\dot{\varphi}_1 \sin\psi_1 - \dot{B}\cos\psi_2 + B\dot{\varphi}_2 \sin\psi_2 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

对式(13)再次求微分, 可以得到关于变量  $\alpha$  和  $\beta$  的二阶微分方程, 进而根据  $\omega_1 = 1 + \nu$ ,  $\omega_2 = 1 - \nu$  和式(13)代入到式(9)进行变量替换, 得到以幅值-相位为变量的方程组如下:

$$\begin{cases} \dot{A}\omega_1 \cos\psi_1 - A\omega_1\dot{\varphi}_1 \sin\psi_1 + \dot{B}\omega_2 \cos\psi_2 - B\omega_2\dot{\varphi}_2 \sin\psi_2 = -\varepsilon F_1 \\ -\dot{A}\omega_1 \sin\psi_1 - A\omega_1\dot{\varphi}_1 \cos\psi_1 + \dot{B}\omega_2 \sin\psi_2 + B\omega_2\dot{\varphi}_2 \cos\psi_2 = -\varepsilon F_2 \end{cases} \quad (15)$$

下面, 联立式(14)和式(15)对幅值  $A$ 、 $B$  和相位  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  进行求解, 可得

$$\begin{cases} \dot{A} = -\frac{\varepsilon}{2}(F_1 \cos\psi_1 - F_2 \sin\psi_1) \\ \dot{B} = -\frac{\varepsilon}{2}(F_1 \cos\psi_2 + F_2 \sin\psi_2) \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{\varepsilon}{2A}(F_2 \cos\psi_1 + F_1 \sin\psi_1) \\ \dot{\varphi}_2 = -\frac{\varepsilon}{2B}(F_2 \cos\psi_2 - F_1 \sin\psi_2) \end{cases} \quad (16)$$

进一步, 由式(16)可以看出变量  $A$ 、 $B$  和  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  是慢变函数, 因此这里采用求均值法进行求解, 得到结果如下:

$$\begin{cases} \dot{A} = -\varepsilon\gamma A\omega_1 \\ \dot{B} = -\varepsilon\gamma B\omega_2 \\ \dot{\varphi}_1 = \varepsilon\left(\frac{3}{2}\tilde{d}A^2 + 6\tilde{d}B^2 - \frac{1}{2}\delta v\omega_1\right) \\ \dot{\varphi}_2 = -\varepsilon\left(\frac{3}{2}\tilde{d}B^2 + 6\tilde{d}A^2 - \frac{1}{2}\delta v\omega_2\right) \end{cases} \quad (17)$$

因此，基于式(17)可以得到解的形式为

$$\begin{cases} A = A_0 e^{-\varepsilon\gamma\omega_1\tau} \\ B = B_0 e^{-\varepsilon\gamma\omega_2\tau} \\ \varphi_1 - \varphi_{1(0)} = \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{3\tilde{d}}{2\omega_1}A_0^2(1 - e^{-2\varepsilon\gamma\omega_1\tau}) + \frac{6\tilde{d}}{\omega_2}B_0^2(1 - e^{-2\varepsilon\gamma\omega_2\tau}) - \varepsilon\delta v\gamma\omega_1\right) \\ \varphi_2 - \varphi_{2(0)} = -\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{3\tilde{d}}{2\omega_2}B_0^2(1 - e^{-2\varepsilon\gamma\omega_2\tau}) + \frac{6\tilde{d}}{\omega_1}A_0^2(1 - e^{-2\varepsilon\gamma\omega_1\tau}) - \varepsilon\delta v\gamma\omega_2\right) \end{cases} \quad (18)$$

式中， $A_0$ 、 $B_0$ 和 $\varphi_{1(0)}$ 、 $\varphi_{2(0)}$ 是初始条件。

基于以上的结果，利用环形坐标 $(r, k, \theta, \chi)$ 来分析OXY平面内敏感元件的性能。下面给出转换慢变轨道元素的公式如下：

$$\begin{cases} r = A + B \\ k = A - B \\ \theta = -v\tau + \tilde{\theta} \\ \chi = \int \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)dt \end{cases} \quad (19)$$

式中， $\theta$ 为波图的定向角； $\tilde{\theta} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ ，决定波图中仪表漂移大小的附加缓慢进动； $\chi$ 为相位，描述振动频率变化，并给出点在开始时刻的位置； $r$ 、 $k$ 为振动的基波和二次波的标准振幅，即椭圆的半主轴，如图2所示。

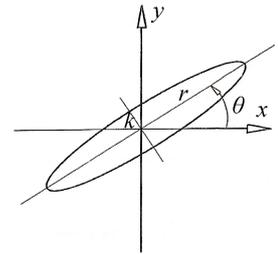


图2 椭圆半主轴示意图  
Fig. 2 Schematic diagram of ellipse semi-major axis

### 3 数值例子

本节主要对以上得到的结果进行数值评估。设定微机械陀螺的参数如下：敏感元件质量 $m_p=10^{-6}$ kg，框架质量 $m_q=10^{-8}$ kg，平面电容触点之间间隙 $h=100\mu\text{m}$ ，基座角速度 $\Omega = 500^\circ/\text{s}$ ；额定振荡频率 $\omega = 1.88 \times 10^4/\text{s}$  (3kHz)，小参数 $\varepsilon = 10^{-3}$ ，振荡回路品质因数 $Q=10^5$ 。基于以上的设定，令初始状态 $A(0)=2\mu\text{m}$ ， $B(0)=1\mu\text{m}$ ，得到的结果如图3所示。

通过对图3进行分析可以得出，在自由振动状态和存在弹性件的非线性刚度时，出现了测量基座转角时的附加误差 $\tilde{\theta}$ ，并且在60秒的观测区间内该误差达到了 $0.023''$ ，这是对于该型陀螺的严重误差。结果表明，系统中第二个质量（即框架质量）的存在对陀螺漂移及相位变化有重要影响。对于安装在以角速度 $\Omega = 500^\circ/\text{s}$ 旋转的活动基座上的双质量陀螺，在60s的观测区间内，仪表漂移达到了 $0.018''$ 。

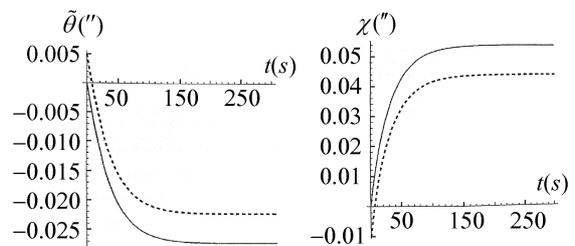


图3 数值仿真结果

Fig. 3 Numerical simulation results

#### 4 结束语

本文主要研究了 L-L 型双质量微机械陀螺的数学模型, 并且在模型中考虑了系统的黏性摩擦、基座角速度和自由振动状态下弹性件的非线性刚度。通过一个数值例子表明, 非线性刚度和框架质量的存在会对确定进动角的精度以及振动相位的变化产生明显影响。

#### 参考文献

- [1] 杜宜璋, 常洪龙, 苑伟政, 等. 多环谐振微机械陀螺的研究现状及发展趋势[J]. 导航与控制, 2019, (4): 1-10.  
DU Yizhang, CHANG Honglong, YUAN Weizheng, et al. Research status and development trend of multi-ring resonant micromechanical gyroscope[J]. Navigation and Control, 2019, (4): 1-10.
- [2] NESTERENKO T G, VTORUSHIN S E, BARBIN E S, et al. Effect of the anisotropy of monocrystalline silicon mechanical properties on the dynamic characteristics of a micromechanical gyroscope [J]. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2015, 81: 012096.
- [3] 文永蓬, 尚慧琳. 微陀螺动力学建模与非线性分析[J]. 振动与冲击, 2015, 34(4): 69-73.  
WEN Yongpeng, SHANG Huilin. Dynamical modeling and nonlinear analysis of microgyroscope[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(4): 69-73.
- [4] 温姣. 一种新型微机械陀螺仪的结构与检测系统研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2011.  
WEN Jiao. Research on the structure and detection system of a new micromechanical gyroscope[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2011.
- [5] 郝淑英, 李伟雄, 李会杰, 等. 驱动刚度非线性对双检测微陀螺性能的影响[J]. 振动与冲击, 2019, 38(14): 131-137.  
HAO Shuying, LI Weixiong, LI Huijie, et al. Effect of driving stiffness nonlinearity on the performance of a double sense-mode micro gyroscope[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(14): 131-137.
- [6] 张利娟, 李欣业, 张华彪. 角度偏移对微机械陀螺系统响应特性的影响[J]. 振动与冲击, 2019, 38(7): 65-70.  
ZHANG Lijuan, LI Xinye, ZHANG Huabiao. Influences of angular deviation on response characteristic of a MEMS gyroscope system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(7): 65-70.
- [7] 殷勇, 王寿荣, 王存超, 等. 一种双质量硅微陀螺仪[J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(6): 703-711.  
YIN Yong, WANG Shourong, WANG Cunchao, et al. Dual-mass silicon micro-gyroscope[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(6): 703-711.
- [8] 殷勇, 王寿荣, 王存超, 等. 结构解耦的双质量微陀螺仪结构方案设计与仿真[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2008(05): 182-186.  
YIN Yong, WANG Shourong, WANG Cunchao, et al. Structural scheme design and simulation of structure-decoupled dual-mass MEMS gyroscope[J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2008(5): 182-186.
- [9] 屈玉丰. 双级解耦微机械陀螺的结构设计及特性研究[D]. 合肥: 合肥工业大学, 2008.  
QU Yufeng. A study of the doubly decoupled micromachined gyroscope design and its characteristics[D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2008.
- [10] 李凌宇, 卢翌, 陈兴, 等. 微机械陀螺仪设计与研究[J]. 电子科技, 2013, 26(9): 172-176.  
LI Lingyu, LU Yi, CHEN Xing, et al. Design of and research on MEMS gyroscope[J]. Electronic Science and Technology, 2013, 26(9): 172-176.
- [11] 郝燕玲, 刘博, 史宏洋. 新型反相位驱动双解耦微机械陀螺设计[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2014, 46(9): 105-110.  
HAO Yanling, LIU Bo, SHI Hongyang. The novel design of anti-phase double-decoupled micromachined gyroscope[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2014, 46(9): 105-110.
- [12] 曹慧亮, 李宏生, 申冲, 等. 双质量硅微机械陀螺仪带宽拓展系统设计[J]. 中国惯性技术学报, 2016, 24(2): 218-223.  
CAO Huiliang, LI Hongsheng, SHEN Chong, et al. Bandwidth expanding system design of dual-mass silicon MEMS gyroscope[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2016, 24(2): 218-223.
- [13] 李锦明, 郭慧芳, 刘俊. 一种三框架电容式硅微机械陀螺仪结构设计与仿真[J]. 传感技术学报, 2008(2): 68-70.  
LI Jinming, GUO Hui Fang, LIU Jun. Design and simulation of a three-frame capacitive micromechanical gyroscope[J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2008(2): 68-70.

#### [作者简介]

佟向鹏 1982 年生, 本科, 高级工程师, 主要研究方向为 MEMS 惯性器件和微机电系统研究。  
王 玺 1994 年生, 硕士研究生, 助理工程师, 主要研究方向为微机电系统研究。